УДК 517.98

UDC 517.98

Н.А. АКСЁНОВ
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра "Математика и информатика", Финансовый университет при Правительстве РФ (Орловский филиал)
E-mail: aksenovna@inbox.ru

N.A. AKSYONOV
Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor, Department of «Mathematics and Informatics», Financial University under the Government of the RF (Orel branch)
E-mail: aksenovna@inbox.ru

КОМПЛЕКСНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

COMPLEX CAUCHY PROBLEM FOR THE SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS

В работе приведены «сильные» условия аналитической разрешимости комплексной задачи Коши, рассматриваемой в произвольном локально выпуклом пространстве относительно одной системы интегро-дифференциально-операторных уравнений.

Ключевые слова: ***комплексная задача Коши, система интегро-дифференциально-операторных уравнений, локально выпуклое пространство, порядок оператора, тип оператора.***

The paper presents the «strong» conditions of solvability of complex analytic Cauchy problem considered in an arbitrary locally convex space with respect to a system of integro-differential operator equations.

Keywords: ***complex Cauchy problem, system of integro-differential operator equations, locally convex space, operator order, operator type.***

Введение

В серии предыдущих работ автора были изучены условия аналитической разрешимости комплексной задачи Коши, поставленной для различных видов систем дифференциально-операторных уравнений (см. [1]-[5]). Как показали проведённые исследования, эти условия можно разделить на два класса: «сильные» условия аналитической разрешимости и «слабые» условия аналитической разрешимости.1

В настоящей работе рассмотрена задача Коши для одной системы интегро-дифференциально-операторных уравнений. В силу представления решения степенными векторнозначными рядами многих комплексных переменных «сильные» условия аналитической разрешимости этой задачи Коши оказались схожими со случаем для систем дифференциально-операторных уравнений. Это позволяет говорить о том, что аналитическая разрешимость задачи Коши для подобных изучаемой ниже систем также может быть дифференцирована на «сильную» и «слабую».

Постановка задачи

Пусть H – произвольное счётно-полное локально выпуклое пространство с определяемой мультинормой $\{\|\cdot\|_p\}, p \in P$ топологией, а $\mathrm{A} = (A_1, A_2, ..., A_l)$ – семейство линейных непрерывных, перестановочных друг с другом операторов $A_\tau : H \to H,\ \tau = 1,2,...,l.$ В этом пространстве рассмотрим систему интегро-дифференциально-операторных уравнений

$$\frac{\partial^{m_\tau} u(z_1, z_2, ..., z_l)}{\partial z_\tau^{m_\tau}} = \\ = A_\tau \int_{a_\tau}^{z_\tau} \frac{(z_\tau - \xi_\tau)^{p_\tau}}{p_\tau !} u(z_1, ..., z_{\tau-1}, \xi_\tau, z_{\tau+1}, ..., z_l) d\xi_\tau, \quad (1)$$

где $\tau = 1,2,...,l,\ m_\tau \in \mathrm{N},\ p_\tau \in \{0\} \cup \mathrm{N}.$ Здесь $u(z_1, z_2, ..., z_l) : \mathrm{C}^l \to H$ – подлежащая определению неизвестная векторнозначная функция от l комплексных переменных, значения которой на каждом фиксированном наборе $z_1, z_2, ..., z_l$ принадлежат пространству H. Ставится

Задача Коши: найти решение системы уравнений (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(a_1, a_2, ..., a_l) = v_{00}, \quad \frac{\partial^k u(a_1, a_2, ..., a_l)}{\partial z_\tau^k} = v_{\tau k}, \quad (2)$$

где $a_\tau \in \mathrm{C},\ v_{00}, v_{\tau k} \in H,\ 1 \le k \le m_\tau - 1,\ \tau = 1,2,...,l.$

Теорема существования и единственности аналитического решения. Устойчивость решения

Теорема 1. *Если операторы* $A_\tau \in \aleph_H^{\beta(A_\tau),\alpha(A_\tau)}[m_\tau + p_\tau + 1, \infty),\ \tau = 1,2,...,l,$ *то задача Коши (1)-(2) имеет единственное решение для любых векторов* $v_{00}, v_{\tau k} \in H,\ 1 \le k \le m_\tau - 1,\ \tau = 1,2,...,l.$ *Оно является векторнозначной функцией* $u(z_1, z_2, ..., z_l)$ l *комплексных переменных со значениями в пространстве* H *и определяется формулой*

$$u(z_1, z_2, ..., z_l) = \\ = u_{00}(z_1, z_2, ..., z_l, v_{00}) + \sum_{r=1}^{l} \sum_{\theta=1}^{m_r - 1} u_{r\theta}(z_1, z_2, ..., z_l, v_{r\theta}), \quad (3)$$

в которой

1 Понятия «сильного», а также «слабого» условий аналитической разрешимости комплексной задачи Коши, сформулированные в терминах теории порядка и типа линейного непрерывного оператора в произвольном локально выпуклом пространстве [6], приведены в работе [4].

© Н.А. Аксёнов
© N.A. Aksyonov

$$u_{00}(z_1,z_2,...,z_l,v_{00}) = \\ = \sum_{n_1,n_2,...,n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{l} \frac{(z_j-a_j)^{(m_j+p_j+1)n_j}}{((m_j+p_j+1)n_j)!} A_j^{n_j}(v_{00}), \quad (4)$$

$$u_{r\theta}(z_1,z_2,...,z_l,v_{r\theta}) = \\ \sum_{n_1,n_2,...,n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{l} \frac{(z_j-a_j)^{(m_j+p_j+1)n_j+\theta_j}}{((m_j+p_j+1)n_j+\theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{r\theta}), \quad (5)$$

где $\theta_j = \theta\delta_{jr}$, $r=1,2,...,l$, $1 \le \theta \le m_r - 1$, δ_{jr} – *символ Кронекера,*

$$\prod_{j=1}^{l} \frac{(z_j-a_j)^{(m_j+p_j+1)n_j}}{((m_j+p_j+1)n_j)!} A_j^{n_j}(v_{00}) \equiv \\ \equiv \frac{(z_1-a_1)^{(m_1+p_1+1)n_1} \cdots (z_l-a_l)^{(m_l+p_l+1)n_l}}{((m_1+p_1+1)n_1)! \cdots ((m_l+p_l+1)n_l)!} A_1^{n_1} A_2^{n_2} ... A_l^{n_l}(v_{00}),$$

$$\prod_{j=1}^{l} \frac{(z_j-a_j)^{(m_j+p_j+1)n_j+\theta_j}}{((m_j+p_j+1)n_j+\theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{r\theta}) \equiv \\ \equiv \frac{(z_1-a_1)^{(m_1+p_1+1)n_1+\theta_1} \cdots (z_l-a_l)^{(m_l+p_l+1)n_l+\theta_l}}{((m_1+p_1+1)n_1+\theta_1)! \cdots ((m_l+p_l+1)n_l+\theta_l)!} A_1^{n_1} A_2^{n_2} ... A_l^{n_l}(v_{r\theta}),$$

причём:

1) если все операторы A_τ имеют порядки $\beta(A_\tau) < m_\tau + p_\tau + 1$, $\tau = 1,2,...,l$, то вектор-функция (3) является целой функций l комплексных переменных;

2) если же среди операторов A_τ найдётся хотя бы один оператор A_s, имеющий порядок $\beta(A_s) = m_s + p_s + 1$ и тип $\alpha(A_s) < \infty$, а остальные операторы A_τ при этом имеют порядки $\beta(A_\tau) < m_\tau + p_\tau + 1$, $\tau = 1,2,...,l$, $\tau \ne s$, то вектор-функция (3) *является аналитической функцией l комплексных переменных в открытом поликруге*

$$C(R,a) = \{z_\tau : |z_\tau - a_\tau| < R_\tau,\ \tau = 1,2,...,l\}$$

с полицентром $a = (a_1,a_2,...,a_l)$ и полирадиусом $R = (R_1,R_2,...,R_l)$, где $R_\tau = \infty$, $\tau = 1,2,...,l$, $\tau \ne s$, а

$$R_s = \frac{m_s+p_s+1}{e}\left(\frac{1}{\alpha(A_s)}\right)^{1/(m_s+p_s+1)}. \quad (6)$$

Лемма 1. *Пусть операторы A_τ имеют порядки $\beta(A_\tau) < m_\tau + p_\tau + 1$, $\tau = 1,2,...,l$. Тогда кратные ряды (4)-(5) сходятся по топологии пространства H абсолютно на C^l.*

Лемма 2. *Если среди операторов A_τ найдётся хотя бы один оператор A_s такой, что $\beta(A_s) = m_s + p_s + 1$, $\alpha(A_s) < \infty$, а остальные операторы A_τ при этом имеют порядки $\beta(A_\tau) < m_\tau + p_\tau + 1$, $\tau = 1,2,\ldots,l$, $\tau \ne s$, то кратные ряды* (4)-(5) *сходятся по топологии пространства H абсолютно в открытом поликруге $C(R,a)$ с полицентром $(a_1,a_2,...,a_l)$ и полирадиусом $R = (R_1,R_2,...,R_l)$, где $R_\tau = \infty$, $\tau = 1,2,...,l$, $\tau \ne s$, а R_s вычисляется по формуле* (6).

Доказательство лемм 1-2 проводится аналогично доказательству соответствующих лемм работы [2].

Доказательство теоремы 1. В силу лемм 1-2 кратные ряды (4)-(5) сходятся абсолютно и равномерно в некоторых областях l-мерного векторного комплексного пространства C^l, поэтому допускают почленное дифференцирование по переменным $z_\tau, \tau = 1,2,\ldots,l$ любое число раз. Поскольку

$$\frac{\partial^{m_\tau} u_{00}(z_1,z_2,...,z_l,v_{00})}{\partial z_\tau^{m_\tau}} = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_{\tau-1},n_{\tau+1},\ldots,n_l=0 \\ n_\tau=1}}^{\infty} \frac{(z_\tau-a_\tau)^{(m_\tau+p_\tau+1)n_\tau-m_\tau}}{((m_\tau+p_\tau+1)n_\tau-m_\tau)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j\ne\tau}}^{l} \frac{(z_j-a_j)^{(m_j+p_j+1)n_j}}{((m_j+p_j+1)n_j)!} A_j^{n_j} A_\tau^{n_\tau}(v_{00}) = \\ = A_\tau \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_l=0}^{\infty} \frac{(z_\tau-a_\tau)^{(m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+p_\tau+1}}{((m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+p_\tau+1)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j\ne\tau}}^{l} \frac{(z_j-a_j)^{(m_j+p_j+1)n_j}}{((m_j+p_j+1)n_j)!} A_j^{n_j} A_\tau^{n_\tau}(v_{00}),$$

$$\frac{\partial^{m_\tau} u_{r\theta}(z_1,z_2,...,z_l,v_{r\theta})}{\partial z_\tau^{m_\tau}} = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_{\tau-1},n_{\tau+1},\ldots,n_l=0 \\ n_\tau=1}}^{\infty} \frac{(z_\tau-a_\tau)^{(m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+\theta_\tau-m_\tau}}{((m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+\theta_\tau-m_\tau)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j\ne\tau}}^{l} \frac{(z_j-a_j)^{(m_j+p_j+1)n_j+\theta_j}}{((m_j+p_j+1)n_j+\theta_j)!} A_j^{n_j} A_\tau^{n_\tau}(v_{r\theta}) = \\ = A_\tau \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_l=0}^{\infty} \frac{(z_\tau-a_\tau)^{(m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+\theta_\tau+p_\tau+1}}{((m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+\theta_\tau+p_\tau+1)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j\ne\tau}}^{l} \frac{(z_j-a_j)^{(m_j+p_j+1)n_j+\theta_j}}{((m_j+p_j+1)n_j+\theta_j)!} A_j^{n_j} A_\tau^{n_\tau}(v_{r\theta}),$$

где $\tau = 1,2,...,l$, то из (3) следует, что для любого $\tau = 1,2,...,l$

$$\frac{\partial^{m_\tau} u(z_1,z_2,...,z_l)}{\partial z_\tau^{m_\tau}} = \frac{\partial^{m_\tau} u_{00}(z_1,z_2,...,z_l,v_{00})}{\partial z_\tau^{m_\tau}} + \sum_{r=1}^{l} \sum_{\theta=1}^{m_r-1} \frac{\partial^{m_\tau} u_{r\theta}(z_1,z_2,...,z_l,v_{r\theta})}{\partial z_\tau^{m_\tau}} = \\ = A_\tau \left(\sum_{n_1,n_2,\ldots,n_l=0}^{\infty} \frac{(z_\tau-a_\tau)^{(m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+p_\tau+1}}{((m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+p_\tau+1)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j\ne\tau}}^{l} \frac{(z_j-a_j)^{(m_j+p_j+1)n_j}}{((m_j+p_j+1)n_j)!} A_j^{n_j} A_\tau^{n_\tau}(v_{00}) + \right.$$

С другой стороны, для любого $\tau = 1,2,...,l$

$$A_\tau \int_{a_\tau}^{z_\tau} \frac{(z_\tau-\xi_\tau)^{p_\tau}}{p_\tau!} u(z_1,...,z_{\tau-1},\xi_\tau,z_{\tau+1},...,z_l)\,d\xi_\tau = A_\tau \int_{a_\tau}^{z_\tau} \frac{(z_\tau-\xi_\tau)^{p_\tau}}{p_\tau!} u_{00}(z_1,...,z_{\tau-1},\xi_\tau,z_{\tau+1},...,z_l,v_{00})\,d\xi_\tau +$$

$$+A_\tau \int_{a_\tau}^{z_\tau} \frac{(z_\tau-\xi_\tau)^{p_\tau}}{p_\tau!} \sum_{r=1}^{l}\sum_{\theta=1}^{m_r-1} u_{r\theta}(z_1,...,z_{\tau-1},\xi_\tau,z_{\tau+1},...,z_l,v_{r\theta})d\xi_\tau. \quad (7)$$

Легко видеть, что для любого $\tau=1,2,...,l$

$$A_\tau \int_{a_\tau}^{z_\tau} \frac{(z_\tau-\xi_\tau)^{p_\tau}}{p_\tau!} u_{00}(z_1,...,z_{\tau-1},\xi_\tau,z_{\tau+1},...,z_l,v_{00})d\xi_\tau =$$

$$= A_\tau \sum_{n_1,n_2,...,n_l=0}^{\infty} \int_{a_\tau}^{z_\tau} \frac{(z_\tau-\xi_\tau)^{p_\tau}(\xi_\tau-a_\tau)^{(m_\tau+p_\tau+1)n_\tau}d\xi_\tau}{p_\tau!((m_\tau+p_\tau+1)n_\tau)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq\tau}}^{l} \frac{(z_j-a_j)^{(m_j+p_j+1)n_j}}{((m_j+p_j+1)n_j)!} A_j^{n_j} A_\tau^{n_\tau}(v_{00}), \quad (8)$$

$$A_\tau \int_{a_\tau}^{z_\tau} \frac{(z_\tau-\xi_\tau)^{p_\tau}}{p_\tau!} \sum_{r=1}^{l}\sum_{\theta=1}^{m_r-1} u_{r\theta}(z_1,...,z_{\tau-1},\xi_\tau,z_{\tau+1},...,z_l,v_{r\theta})d\xi_\tau =$$

$$= A_\tau \sum_{r=1}^{l}\sum_{\theta=1}^{m_r-1} \sum_{n_1,n_2,...,n_l=0}^{\infty} \int_{a_\tau}^{z_\tau} \frac{(z_\tau-\xi_\tau)^{p_\tau}(\xi_\tau-a_\tau)^{(m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+\theta_\tau}d\xi_\tau}{p_\tau!((m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+\theta_\tau)!} \times \prod_{\substack{j=1\\ j\neq\tau}}^{l} \frac{(z_j-a_j)^{(m_j+p_j+1)n_j+\theta_j}}{((m_j+p_j+1)n_j+\theta_j)!} A_j^{n_j} A_\tau^{n_\tau}(v_{r\theta}). \quad (9)$$

Полагая $\xi_\tau=(z_\tau-a_\tau)y_\tau+a_\tau$, $y_\tau\in\mathrm{R}$, $\tau=1,2,...,l$ и учитывая, что

$$\int_0^1 y^{m-1}(1-y)^{n-1}dy = \mathrm{B}(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!},$$

где $\mathrm{B}(m,n)$ – бета-функция, $\Gamma(s)=\int_0^\infty y^{s-1}e^{-y}dy$ – гамма-функция, будем иметь:

$$\int_{a_\tau}^{z_\tau} \frac{(z_\tau-\xi_\tau)^{p_\tau}(\xi_\tau-a_\tau)^{(m_\tau+p_\tau+1)n_\tau}d\xi_\tau}{p_\tau!((m_\tau+p_\tau+1)n_\tau)!} = \frac{(z_\tau-a_\tau)^{(m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+p_\tau+1}}{((m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+p_\tau+1)!}, \quad (10)$$

$$\int_{a_\tau}^{z_\tau} \frac{(z_\tau-\xi_\tau)^{p_\tau}(\xi_\tau-a_\tau)^{(m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+\theta_\tau}d\xi_\tau}{p_\tau!((m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+\theta_\tau)!} = \frac{(z_\tau-a_\tau)^{(m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+\theta_\tau+p_\tau+1}}{((m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+\theta_\tau+p_\tau+1)!}. \quad (11)$$

Следовательно, в силу (7)-(11) для любого $\tau=1,2,...,l$

$$A_\tau \int_{a_\tau}^{z_\tau} \frac{(z_\tau-\xi_\tau)^{p_\tau}}{p_\tau!} u(z_1,...,z_{\tau-1},\xi_\tau,z_{\tau+1},...,z_l)d\xi_\tau = A_\tau \left(\sum_{n_1,n_2,...,n_l=0}^{\infty} \frac{(z_\tau-a_\tau)^{(m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+p_\tau+1}}{((m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+p_\tau+1)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq\tau}}^{l} \frac{(z_j-a_j)^{(m_j+p_j+1)n_j}}{((m_j+p_j+1)n_j)!} A_j^{n_j} A_\tau^{n_\tau}(v_{00}) + \right.$$

$$\left. +\sum_{r=1}^{l}\sum_{\theta=1}^{m_r-1} \sum_{n_1,n_2,...,n_l=0}^{\infty} \frac{(z_\tau-a_\tau)^{(m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+\theta_\tau+p_\tau+1}}{((m_\tau+p_\tau+1)n_\tau+\theta_\tau+p_\tau+1)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq\tau}}^{l} \frac{(z_j-a_j)^{(m_j+p_j+1)n_j+\theta_j}}{((m_j+p_j+1)n_j+\theta_j)!} A_j^{n_j} A_\tau^{n_\tau}(v_{r\theta}) \right).$$

Таким образом, вектор-функция (3) является решением системы (1). Действуя аналогично [2], несложно показать, что вектор-функция (3) удовлетворяет также начальным условиям (2). Кроме того, рассуждая по схеме, изложенной в [4], можно показать, что задача Коши (1)-(2) имеет единственное «сильное» решение. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть операторы* $A_\tau\in\aleph_H^{\beta(A_\tau),\alpha(A_\tau)}[m_\tau+p_\tau+1,\infty)$, $\tau=1,2,...,l$. *Тогда решение задачи Коши (1)-(2) непрерывно зависит от начальных данных* v_{00}, $v_{\tau k}\in H$, $1\le k\le m_\tau-1$, $\tau=1,2,...,l$.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы работы [2].

Библиографический список

1. *Аксёнов Н.А.* Задача Коши для систем дифференциально-операторных уравнений первого порядка со смешанными операторами. Вестник Ижевского государственного технического университета 2009; №4 (44). С. 176–178.
2. *Аксёнов Н.А.* Задача Коши для некоторых систем дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка в локально выпуклых пространствах. Математические заметки 2011; № 90 (2). С. 183–198.
3. *Аксёнов Н.А.* К вопросу об аналитической разрешимости комплексной задачи Коши для некоторых систем дифференциально-операторных уравнений в локально выпуклых пространствах. Учёные записки Орловского государственного университета. Серия «Естественные, технические и медицинские науки» 2012; № 6 (50). С. 18–22.
4. *Аксёнов Н.А.* Аналитическая разрешимость комплексной задачи Коши для некоторых систем дифференциально-операторных уравнений с переменными коэффициентами. Учёные записки Орловского государственного университета. Серия «Естественные, технические и медицинские науки» 2013; № 6 (56). С. 25–32.
5. *Аксёнов Н.А.* Об аналитической разрешимости комплексной задачи Коши для одной системы дифференциально-операторных уравнений. Материалы 1-й Международной научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математических наук». Орел: ОГУ, 2014. С. 9–12.
6. *Громов В.П., Мишин С.Н., Панюшкин С.В.* Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения. Орёл: ОГУ, 2009.

References

1. *Aksyonov N.A.* The Cauchy problem for systems of differential-operator equations of the first order with mixed operators. Bulletin of the Izhevsk State Technical University 2009; №4 (44). Pp. 176–178.
2. *Aksyonov N.A.* The Cauchy problem for some systems of differential-operator equations of arbitrary order in locally convex spaces. Mathematical Notes 2011; № 90 (2). Pp. 183–198.
3. *Aksyonov N.A.* To the question on the analytic solvability of the complex problem of Cauchy for some systems of differential-operator equations in locally convex spaces. Scientific notes of Orel State University. A series of «natural, technical and medical sciences» 2012; № 6 (50). Pp. 18–22.
4. *Aksyonov N.A.* The analytic solvability of the complex problem of Cauchy for some systems of differential-operator equations with variable coefficients. Scientific notes of Orel State University. A series of «natural, technical and medical sciences» 2013; № 6 (56). Pp. 25–32.
5. *Aksyonov N.A.* On the analytic solvability complex Cauchy problem for a system differential-operator equations. Proceedings of the 1st International Scientific-Practical Conference «Modern problems of physical and mathematical sciences». Orel: OSU, 2014. Pp. 9–12.
6. *Gromov V.P., Mishin, S.N., Panyushkin S.V.* Operators of finite order, and differential-operator equations. Monograph. Orel: OSU, 2009.