

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
**«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ»**

Новороссийский филиал
Кафедра «Информатики, математики и общегуманитарные науки»

Методические рекомендации
ТЕОРИЯ ИГР

Направление подготовки: 38.03.01 Экономика
Направленность (профиль): Оценка бизнеса в цифровой экономике
Программа подготовки: академическая
Форма обучения: очная
Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Новороссийск 2022

Данные методические рекомендации содержат условие контрольной работы, краткие теоретические сведения и примеры решения задач по дисциплине **ТЕОРИЯ ИГР**

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

РАЗДЕЛ 1. Антагонистические матричные игры

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой. Обозначим одного игрока через A , а другого через B . Предположим, игрок A имеет n стратегий A_1, A_2, \dots, A_n , а игрок B – m стратегий B_1, B_2, \dots, B_m . Выбор игроками A и B стратегий A_i и B_j однозначно определяет исход игры: выигрыш игрока A – a_{ij} и проигрыш игрока B – b_{ij} , где $b_{ij} = -a_{ij}$ (т.е. выигрыш игрока A – это проигрыш игрока B , и наоборот).

Так как игрок A выигрывает столько, сколько проигрывает игрок B , то сумма выигрышей двух игроков равна 0. Такие игры принято называть играми с нулевой суммой или антагонистическими играми. Если предположить, что все выигрыши a_{ij} известны, то можно составить прямоугольную таблицу (матрицу), в которой перечислены стратегии игроков и соответствующие выигрыши:

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2	...	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
...
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}

Полученная матрица называется матрицей игры или – платежной матрицей. Рассматриваемую игру часто называют матричной игрой.

Ценой игры называется средний выигрыш игрока A .

Ситуация равновесия в матричной игре

Нижняя цена игры (для первого игрока)

$$\alpha = \max_i (\min_j a_{ij}).$$

Верхняя цена игры (для второго игрока)

$$\beta = \min_j (\max_i a_{ij}).$$

Если $\alpha = \beta$, то игра называется игрой с седловой точкой, или игрой с чистыми стратегиями. При этом $V = \alpha = \beta$, где V – значение выигрыша или цена игры.

Игры со смешанными стратегиями

Если игра не имеет седловой точки, т.е. $\alpha \neq \beta$, то игра решается в смешанных стратегиях. При этом игрок в процессе игры использует несколько раз каждую из своих стратегий. Вектор, состоящий из отно-

сительных частот использования игроком соответствующих чистых стратегий, называется смешанной стратегией данного игрока.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – смешанная стратегия игрока A .

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – смешанная стратегия игрока B .

x_i, y_j – относительные частоты (вероятности) использования игроками своих стратегий. Следовательно, $\sum_{i=1}^n x_i = 1, \sum_{j=1}^m y_j = 1$.

Если $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ – оптимальные стратегии игроков, то число, равное $V = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i^* y_j^*$, является ценой игры.

Для того, чтобы V была ценой игры, а X^* и Y^* – оптимальными стратегиями, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i^* &\geq V, \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j^* &\leq V. \end{aligned}$$

Если один из игроков применяет свою оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры V вне зависимости от того, какие действия предпринимает другой игрок.

Сведем задачу поиска оптимальных смешанных стратегий к задаче линейного программирования. Для этого составим двойственную пару задач.

Для игрока A

$$\begin{aligned} F = V &\rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j &\geq V, \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^m y_j &= 1. \end{aligned}$$

Для игрока B

$$\begin{aligned} F = V &\rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i &\leq V, \quad j = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1. \end{aligned}$$

При нахождении оптимальной стратегии (x_1, x_2, \dots, x_n) первого игрока будем использовать модель для второго игрока, так как данные переменные находятся в его задаче. И наоборот, при нахождении оптимальной стратегии (y_1, y_2, \dots, y_m) второго игрока будем оперировать моделью первого игрока.

Графический метод решения игр размером $2 \times m$ или $n \times 2$

Рассмотрим игру размером $2 \times m$. Пусть игра имеет решение в смешанных стратегиях $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, где

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_m = 1.$$

Если игрок A использует свою оптимальную стратегию, то $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 = V$.

Учитывая, что $x_2 = 1 - x_1$, получим систему линейных уравнений

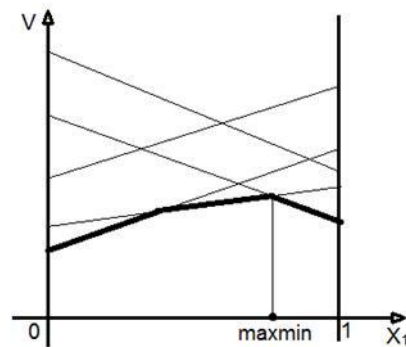
$$a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = V$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}(1 - x_1) = V$$

.....

$$a_{1m}x_1 + a_{2m}(1 - x_1) = V.$$

Построим данные прямые в системе координат (x_1, V) , где x_1 принадлежит отрезку $[0, 1]$. Нижняя огибающая семейства прямых будет соответствовать функции минимальных значений выигрыша $V(x_1)$. А точка максимума (максимин) этой функции будет соответствовать оптимальному значению x_1 и V .



Для нахождения оптимальных смешанных стратегий игрока B приравняем к 0 вероятности чистых стратегий, не пересекающихся в точке максимума. А для нахождения вероятностей выбора активных стратегий решим систему уравнений

$$y_{j1} + y_{j2} = 1$$

$$a_{1j1}y_{j1} + a_{1j2}y_{j2} = V$$

$$a_{2j1}y_{j1} + a_{2j2}y_{j2} = V.$$

В случае игры размер $n \times 2$ строится графическое представление игры для игрока B и выделяется не нижняя огибающая, а верхняя, и на ней находится точка минимума (минимакс).

Принцип доминирования

Стратегия A_i будет доминировать стратегию A_j , если $a_{ik} \geq a_{jk}$ для всех $k = 1 \dots m$. В этом случае стратегия A_j не будет использоваться и соответствующая строка из платежной матрицы удаляется.

Стратегия B_j будет доминировать над стратегией B_i , если $a_{ki} \leq a_{kj}$ для всех $k = 1 \dots n$. В этом случае стратегия B_j не будет использоваться и соответствующий столбик удаляется из платежной матрицы.

ВАРИАНТ 1

1. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, указать седловую точку и значение выигрыша.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Найти решение следующей игровой задачи графическим способом.

$$1. \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \\ 0 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Получить новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решить игру.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Решить игру в смешанных стратегиях, используя симплекс-метод.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 2

1. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, указать седловую точку и значение выигрыша.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Найти решение следующей игровой задачи графическим способом.

$$1. \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 8 \\ 1 & 6 \\ 9 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Получить новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решить игру.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Решить игру в смешанных стратегиях, используя симплекс-метод.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 3

1. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, указать седловую точку и значение выигрыша.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Найти решение следующей игровой задачи графическим способом.

$$1. \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 6 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Получить новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решить игру.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Решить игру в смешанных стратегиях, используя симплекс-метод.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, указать седловую точку и значение выигрыша.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Найти решение следующей игровой задачи графическим способом.

$$1. \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 5 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Получить новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решить игру.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Решить игру в смешанных стратегиях, используя симплекс-метод.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, указать седловую точку и значение выигрыша.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Найти решение следующей игровой задачи графическим способом.

$$1. \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 9 \\ 4 & 5 \\ 1 & 8 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Получить новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решить игру.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Решить игру в смешанных стратегиях, используя симплекс-метод.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

РАЗДЕЛ 2. Статистические игры

Пусть игрок A имеет n возможных стратегий A_1, A_2, \dots, A_n , а природа может находиться в одном из m возможных состояний $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$, которые будем рассматривать за ее «стратегии». Все возможные состояния природы известны, но не известно, какое состояние будет иметь место на момент реализации принимаемого решения. Выигрыш игрока A при выбранной им стратегии $A_i, i = 1, \dots, n$ и при состоянии природы $\Pi_j, j = 1, \dots, m$ обозначим за a_{ij} . Так же, как и в матричных играх, из выигрышей игрока A можем сформировать матрицу. Данная матрица отличается от матрицы антагонистической игры тем, что элементы столбцов не являются проигрышами природы.

Принцип выбора наилучшей стратегии в статистических играх при неизвестных вероятностях состояний природы осуществляется со-гласно критериям.

Критерий Лапласа

В данном критерии полагается, что все состояния природы равновероятны с вероятностями $p_i = 1/m$. Тогда для выбора оптимальной стратегии A_i в задаче, представленной матрицей выигрышей, вычисляют максимальное значение среди предварительно вычисленных по строкам средних арифметических значений, дающих наибольший выигрыш

$$\max_i (1/m \sum_{j=1}^m a_{ij}).$$

Если игра представлена матрицей возможных затрат, то вычисляется

$$\min_i (1/m \sum_{j=1}^m a_{ij}).$$

Критерий Вальда

Критерий наибольшей осторожности

Если игра представлена матрицей выигрышей, то при выборе оптимальной стратегии используют максиминный критерий

$$\max_i \min_j (a_{ij}).$$

Если исходная матрица представляет потери игрока A , то используют минимаксный критерий

$$\min_i \max_j (a_{ij}).$$

Метод оптимального оптимизма

Для игры, представленной матрицей выигрыша, при выборе оптимальной стратегии вычисляют

$$\max_i \max_j (a_{ij}).$$

Для игры, представленной матрицей затрат,

$$\min_i \min_j (a_{ij}).$$

Критерий Сэвиджа

Критерий, минимизирующий риски

Для данного критерия надо построить матрицу рисков, элементы которой r_{ij} вычисляются по формулам

$$r_{ij} = \max_i (a_{ij}) - a_{ij}, \text{ если } a - \text{выигрыш};$$
$$r_{ij} = a_{ij} - \min_i (a_{ij}), \text{ если } a - \text{потери}.$$

Для матрицы рисков, при выборе оптимальной стратегии, в дальнейшем используют минимаксный критерий

$$\min_i \max_j (r_{ij}).$$

Критерий Гурвица

Согласно данному критерию игрок может ввести оценочный коэффициент, называемый коэффициентом доверия α , который принадлежит отрезку $0, 1$. Данный коэффициент вычисляется лицом, принимающим решение на основе или статистических данных, или исходя из личного опыта, при принятии решений в сходных ситуациях.

Критерий основывается на предположении: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $1 - \alpha$ и в самом выгодном состоянии с вероятностью α .

Если исходная задача представлена матрицей выигрышей, то согласно критерию надо вычислить

$$\max_i (\alpha \max_j a_{ij} + (1 - \alpha) \min_j a_{ij}).$$

А если матрица возможных результатов представляет затраты, то \min_i

$$(\alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij}).$$

Если в игре заранее известны вероятности состояний природы q_1, q_2, \dots, q_m , то принцип выбора состоит в максимизации математического ожидания выигрыша для матрицы выигрышей

$$\max_i \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j,$$

или в минимизации математического ожидания потерь для матрицы потерь

$$\min_i \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j.$$

Задачи

1. Торговая организация решила закупить партию сезонных товаров. У нее имеются 4 коммерческих предложения от разных поставщиков: А, Б, В и Г. Прибыль организации зависит от возможного спроса на каждую предлагаемую продукцию. Отдел маркетинга прогнозирует 4 возможные величины спроса: С1, С2, С3, С4. Прибыль по каждому предложению для каждого варианта спроса представлена в табл. 1.

а) Используя критерии Лапласа, Вальда, метод максимального оптимизма, Сэвиджа, Гурвица при $\alpha = p$, принять оптимальное решение по выбору поставщика.

б) Определить оптимальную стратегию при известном векторе P вероятностей состояний спроса.

2. Торговый холдинг решил провести рекламную кампанию «подарок за покупку». Было выбрано 4 возможных варианта подарка: А, Б, В и Г. Затраты на данную кампанию зависят от покупательской активности в период проведения акции. Отдел маркетинга прогнозирует 4 возможных варианта активности потребителей: С1, С2, С3, С4. Затраты по каждому варианту подарка в зависимости от варианта активности представлены в табл. 2.

а) Используя критерии Лапласа, Вальда, метод максимального оптимизма, Сэвиджа, Гурвица при $\alpha = p$, принять оптимальное решение по выбору подарка для данной компании.

б) Определить оптимальную стратегию при известном векторе P вероятностей состояний активности покупателей.

ВАРИАНТ 1

Таблица 1

	C1	C2	C3	C4
A	115	121	123	130
Б	105	110	120	130
В	110	120	135	140
Г	118	125	128	140

$$p = 0.4; P = (0.2, 0.3, 0.1, 0.4)$$

Таблица 2

	C1	C2	C3	C4
A	23	32	34	40
Б	30	33	35	39
В	25	34	35	40
Г	28	32	38	40

$$p = 0.8; P = (0.3, 0.4, 0.2, 0.1)$$

ВАРИАНТ 2

Таблица 1

	C1	C2	C3	C4
A	105	123	130	141
Б	105	110	125	130
В	115	120	125	135
Г	103	105	125	140

$$p = 0.6; P = (0.3, 0.2, 0.2, 0.3)$$

Таблица 2

	C1	C2	C3	C4
A	15	21	23	30
Б	11	22	33	36
В	10	20	35	40
Г	18	25	28	40

$$p = 0.4; P = (0.2, 0.4, 0.2, 0.2)$$

ВАРИАНТ 3

Таблица 1

	<u>C1</u>	<u>C2</u>	<u>C3</u>	<u>C4</u>
A	104	105	123	133
Б	105	110	127	130
B	105	108	120	130
Г	110	114	120	125

$$p = 0.7; P = (0.1, 0.4, 0.3, 0.2)$$

Таблица 2

	C1	C2	C3	C4
A	12	23	32	37
Б	15	20	30	35
B	10	22	35	37
Г	14	23	28	40

$$p = 0.3; P = (0.2, 0.4, 0.1, 0.3)$$

ВАРИАНТ 4

Таблица 1

	C1	C2	C3	C4
A	105	108	125	134
Б	110	113	120	125
B	100	110	125	135
Г	105	106	122	128

$$p = 0.3; P = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$$

Таблица 2

	C1	C2	C3	C4
A	12	23	30	38
Б	10	19	32	40
B	11	20	35	40
Г	18	25	28	35

$$p = 0.7; P = (0.2, 0.4, 0.1, 0.3)$$

ВАРИАНТ 5

Таблица 1

	C1	C2	C3	C4
A	106	123	125	134
Б	110	115	123	140
B	112	120	136	138
Г	115	120	125	145

$$p = 0.8; P = (0.4, 0.3, 0.1, 0.2)$$

Таблица 2

	C1	C2	C3	C4
A	12	23	25	32
Б	15	19	20	30
B	11	20	35	40
Г	18	25	28	38

$$p = 0.2; P = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$$