Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Новороссийский филиал
Кафедра «Информатики, математики и общегуманитарные науки»

Методические рекомендации

ТЕОРИЯ ИГР

Направление подготовки: 38.03.01 Экономика
Направленность (профиль): Оценка бизнеса в цифровой экономике
Программа подготовки: академическая
Форма обучения: очная
Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Новороссийск 2021

Данные методические рекомендации содержат условие контрольной работы, краткие теоретические сведения и примеры решения задач по дисциплине

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

РАЗДЕЛ 1. Антагонистические матричные игры

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой. Обозначим одного игрока через A, а другого через B. Предполо-жим, игрок A имеет n стратегий A_1, A_2, …, A_n, а игрок B – m стратегий B_1, B_2, …, B_m. Выбор игроками A и B стратегий A_i и B_j однозначно оп-ределяет исход игры: выигрыш игрока A – a_{ij} и проигрыш игрока B – b_{ij}, где $b_{ij} = -a_{ij}$ (т.е. выигрыш игрока A – это проигрыш игрока B, и наобо-рот).

Так как игрок A выигрывает столько, сколько проигрывает игрок B, то сумма выигрышей двух игроков равна 0. Такие игры принято называть играми с нулевой суммой или антагонистическими играми. Если предположить, что все выигрыши a_{ij} известны, то можно составить прямоугольную таблицу (матрицу), в которой перечислены стратегии игроков и соответствующие выигрыши:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	…	B_m
A_1	$a11$	$a12$	…	$a1m$
A_2	$a21$	$a22$	…	$a2m$
…	…	…	…	…
A_n	$an1$	$an2$	…	anm

Полученная матрица называется матрицей игры или – платежной матрицей. Рассматриваемую игру часто называют матричной игрой.
Ценой игры называется средний выигрыш игрока A.

Ситуация равновесия в матричной игре

Нижняя цена игры (для первого игрока)

$\alpha = \max_i (\min_j a_{ij})$.

Верхняя цена игры (для второго игрока)

$\beta = \min_j (\max_i a_{ij})$.

Если $\alpha = \beta$, то игра называется игрой с седловой точкой, или иг-рой с чистыми стратегиями. При этом $V = \alpha = \beta$, где V – значение вы-игрыша или цена игры.

Игры со смешанными стратегиями

Если игра не имеет седловой точки, т.е. $\alpha \neq \beta$, то игра решается в смешанных стратегиях. При этом игрок в процессе игры использует несколько раз каждую из своих стратегий. Вектор, состоящий из относительных частот использования игроком соответствующих чистых стратегий, называется смешанной стратегией данного игрока.

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – смешанная стратегия игрока A.

$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – смешанная стратегия игрока B.

x_i, y_j – относительные частоты (вероятности) использования игро-ками своих стратегий. Следовательно, $\sum^n_{i=1} x_i = 1$, $\sum^n_{i=1} y_j = 1$.

Если $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ – оптимальные стратегии игроков, то число, равное $V = \sum^m_{j=1} \sum^n_{i=1} a_{ij}x_i^* y_j^*$, является ценой игры.

Для того, чтобы V была ценой игры, а X^* и Y^* – оптимальными стратегиями, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$\sum^n_{i=1} a_{ij}x_i^* \geq V$,

$\sum^m_{j=1} a_{ij}y_j^* \leq V$.

Если один из игроков применяет свою оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры V вне зависимости от то-го, какие действия предпринимает другой игрок.

Сведем задачу поиска оптимальных смешанных стратегий к за-даче линейного программирования. Для этого составим двойственную пару задач.

Для игрока A

$$F = V \rightarrow \max$$
$$\sum^m_{j=1} a_{ij}y_j \geq V,\ i = 1, \ldots, n$$
$$\sum^m_{j=1} y_j = 1.$$

Для игрока B

$F = V \rightarrow \min$

$\sum^n_{i=1} a_{ij}x_i \leq V,\ j = 1, \ldots, m$

$$\sum^n_{i=1} x_i = 1.$$

При нахождении оптимальной стратегии $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ первого иг-рока будем использовать модель для второго игрока, так как данные переменные находятся в его задаче. И наоборот, при нахождении оптимальной стратегии $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ второго игрока будем оперировать моделью первого игрока.

Графический метод решения игр размером 2×m или n×2

Рассмотрим игру размером $2\times m$. Пусть игра имеет решение в смешанных стратегиях $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, где

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = 1.$$

Если игрок A использует свою оптимальную стратегию, то $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 = V$.

Учитывая, что $x_2 = 1 - x_1$, получим систему линейных уравнений

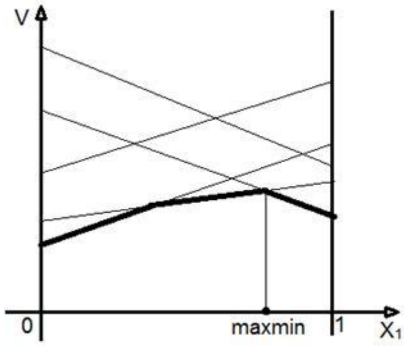
$a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = V$

$a_{12}x_1 + a_{22}(1 - x_1) = V$

……..

$a_{1m}x_1 + a_{2m}(1 - x_1) = V.$

Построим данные прямые в системе координат (x_1, V), где x_1 принадлежит отрезку [0, 1]. Нижняя огибающая семейства прямых будет соответствовать функции минимальных значений выигрыша $V(x_1)$. А точка максимума (максимин) этой функции будет соответствовать оптимальному значению x_1 и V.



Для нахождения оптимальных смешанных стратегий игрока B приравняем к 0 вероятности чистых стратегий, не пересекающихся в точке максимума. А для нахождения вероятностей выбора активных стратегий решим систему уравнений

$$y_{j1} + y_{j2} = 1$$

$a1j1yj1 + a1j2yj2 = V$

$a2j1yj1 + a2j2yj2 = V.$

В случае игры размер $n\times 2$ строится графическое представление игры для игрока B и выделяется не нижняя огибающая, а верхняя, и на ней находится точка минимума (минимакс).

Принцип доминирования

Стратегия A_i будет доминировать стратегию A_j, если $a_{ik} \geq a_{jk}$ для всех $k = 1 \ldots m$. В этом случае стратегия A_j не будет использоваться и соответствующая строка из платежной матрицы удаляется.

Стратегия B_j будет доминировать над стратегией B_i, если $a_{ki} \leq a_{kj}$ для всех $k = 1 \ldots n$. В этом случае стратегия B_j не будет использоваться и соответствующий столбик удаляется из платежной матрицы.

ВАРИАНТ 1

1. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, указать седловую точку и значение выигрыша.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Найти решение следующей игровой задачи графическим способом.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \\ 0 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

3. Получить новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решить игру.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Решить игру в смешанных стратегиях, используя симплекс-метод.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 2

1.Определить верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это воз-можно, указать седловую точку и значение выигрыша.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.Найти решение следующей игровой задачи графическим спо-

собом.

$$1.\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 8 \\ 1 & 6 \\ 9 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad 2.\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

3.Получить новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решить игру.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4.Решить игру в смешанных стратегиях, используя симплекс-метод.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 3

1.Определить верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это воз-можно, указать седловую точку и значение выигрыша.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2.Найти решение следующей игровой задачи графическим спо-

собом.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 6 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

3.Получить новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решить игру.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

4.Решить игру в смешанных стратегиях, используя симплекс-метод.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 4

1.Определить верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это воз-можно, указать седловую точку и значение выигрыша.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.Найти решение следующей игровой задачи графическим спо-

собом.

1. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 5 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

3.Получить новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решить игру.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4.Решить игру в смешанных стратегиях, используя симплекс-метод.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 5

1.Определить верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это воз-можно, указать седловую точку и значение выигрыша.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.Найти решение следующей игровой задачи графическим спо-

собом.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 9 \\ 4 & 5 \\ 1 & 8 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

3.Получить новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решить игру.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

4.Решить игру в смешанных стратегиях, используя симплекс-метод.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

РАЗДЕЛ 2. Статистические игры

Пусть игрок A имеет n возможных стратегий A_1, A_2, …, A_n, а при-рода может находиться в одном из m возможных состояний $П_1$, $П_2$, …, $П_m$, которые будем рассматривать за ее «стратегии». Все возможные состояния природы известны, но не известно, какое состояние будет иметь место на момент реализации принимаемого решения. Выигрыш игрока A при выбранной им стратегии A_i, $i = 1, \ldots, n$ и при состоянии природы $П_j$, $j = 1, \ldots, m$ обозначим за a_{ij}. Так же, как и в матричных иг-рах, из выигрышей игрока A можем сформировать матрицу. Данная матрица отличается от матрицы антагонистической игры тем, что элементы столбцов не являются проигрышами природы.

Принцип выбора наилучшей стратегии в статистических играх при неизвестных вероятностях состояний природы осуществляется со-гласно критериям.

Критерий Лапласа

В данном критерии полагается, что все состояния природы рав-новероятны с вероятностями $p_i = 1/m$. Тогда для выбора оптимальной стратегии A_i в задаче, представленной матрицей выигрышей, вычис-ляют максимальное значение среди предварительно вычисленных по строкам средних арифметических значений, дающих наибольший вы-игрыш

$$\max_i \left(1/m \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right).$$

Если игра представлена матрицей возможных затрат, то вычис-ляется

$$\min_i \left(1/m \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right).$$

Критерий Вальда

Критерий наибольшей осторожности

Если игра представлена матрицей выигрышей, то при выборе оп-тимальной стратегии используют максиминный критерий

$$\max_i \min_j (a_{ij}).$$

Если исходная матрица представляет потери игрока A, то исполь-зуют минимаксный критерий

$$\min_i \max_j (a_{ij}).$$

Метод оптимального оптимизма

Для игры, представленной матрицей выигрыша, при выборе оп-тимальной стратегии вычисляют

$$\max_i \max_j (a_{ij}).$$

Для игры, представленной матрицей затрат,

$$\min_i \min_j (a_{ij}).$$

Критерий Сэвиджа

Критерий, минимизирующий риски

Для данного критерия надо построить матрицу рисков, элементы которой r_{ij} вычисляются по формулам

$$r_{ij} = \max_i (a_{ij}) - a_{ij}, \text{ если } a - \text{выигрыш;}$$

$$r_{ij} = a_{ij} - \min_i (a_{ij}), \text{ если } a - \text{потери.}$$

Для матрицы рисков, при выборе оптимальной стратегии, в дальнейшем используют минимаксный критерий

$$\min_i \max_j (r_{ij}).$$

Критерий Гурвица

Согласно данному критерию игрок может ввести оценочный коэффициент, называемый коэффициентом доверия α, который принадлежит отрезку 0, 1 . Данный коэффициент вычисляется лицом, принимающим решение на основе или статистических данных, или исходя из личного опыта, при принятии решений в сходных ситуациях.

Критерий основывается на предположении: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью 1 – α и в самом выгодном состоянии с вероятностью α.

Если исходная задача представлена матрицей выигрышей, то согласно критерию надо вычислить

$$\max_i (\alpha \max_j a_{ij} + (1 - \alpha) \min_j a_{ij}).$$

А если матрица возможных результатов представляет затраты, то $\min_i$

$$(\alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij}).$$

Если в игре заранее известны вероятности состояний природы q_1, q_2, …, q_m, то принцип выбора состоит в максимизации математическо-го ожидания выигрыша для матрицы выигрышей

$$\max_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j,$$

или в минимизации математического ожидания потерь для матрицы потерь

$$\min_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j.$$

Задачи

1. Торговая организация решила закупить партию сезонных това-ров. У нее имеются 4 коммерческих предложения от разных поставщи-ков: А, Б, В и Г. Прибыль организации зависит от возможного спроса на каждую предлагаемую продукцию. Отдел маркетинга прогнозирует 4 возможные величины спроса: С1, С2, С3, С4. Прибыль по каждому предложению для каждого варианта спроса представлена в табл. 1.

а) Используя критерии Лапласа, Вальда, метод максимального оптимизма, Сэвиджа, Гурвица при $\alpha = p$, принять оптимальное реше-ние по выбору поставщика.

б) Определить оптимальную стратегию при известном векторе *P* вероятностей состояний спроса.

2. Торговый холдинг решил провести рекламную компанию «подарок за покупку». Было выбрано 4 возможных варианта подарка: А, Б, В и Г. Затраты на данную компанию зависят от покупательской ак-тивности в период проведения акции. Отдел маркетинга прогнозирует 4 возможных варианта активности потребителей: С1, С2, С3, С4. За-траты по каждому варианту подарка в зависимости от варианта актив-ности представлены в табл. 2.

а) Используя критерии Лапласа, Вальда, метод максимального оптимизма, Сэвиджа, Гурвица при $\alpha = p$, принять оптимальное реше-ние по выбору подарка для данной компании.

б) Определить оптимальную стратегию при известном векторе *P* вероятностей состояний активности покупателей.

ВАРИАНТ 1

Таблица 1

	C1	**C2**	**C3**	**C4**
А	115	121	123	130
Б	105	110	120	130
В	110	120	135	140
Г	118	125	128	140

p = 0.4; *P* = (0.2, 0.3, 0.1, 0.4)

Таблица 2

	C1	**C2**	**C3**	**C4**
А	23	32	34	40
Б	30	33	35	39
В	25	34	35	40
Г	28	32	38	40

p = 0.8; *P* = (0.3, 0.4, 0.2, 0.1)

ВАРИАНТ 2

Таблица 1

	C1	**C2**	**C3**	**C4**
А	105	123	130	141
Б	105	110	125	130
В	115	120	125	135
Г	103	105	125	140

p = 0.6; *P* = (0.3, 0.2, 0.2, 03)

Таблица 2

	C1	**C2**	**C3**	**C4**
А	15	21	23	30
Б	11	22	33	36
В	10	20	35	40
Г	18	25	28	40

p = 0.4; *P* = (0.2, 0.4, 0.2, 0.2)

ВАРИАНТ 3

Таблица 1

	C1	**C2**	**C3**	**C4**
А	104	105	123	133
Б	105	110	127	130
В	105	108	120	130
Г	110	114	120	125

p = 0.7; *P* = (0.1, 0.4, 0.3, 0.2)

Таблица 2

	C1	**C2**	**C3**	**C4**
А	12	23	32	37
Б	15	20	30	35
В	10	22	35	37
Г	14	23	28	40

p = 0.3; *P* = (0.2, 0.4, 0.1, 0.3)

ВАРИАНТ 4

Таблица 1

	C1	**C2**	**C3**	**C4**
А	105	108	125	134
Б	110	113	120	125
В	100	110	125	135
Г	105	106	122	128

p = 0.3; *P* = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)

Таблица 2

	C1	**C2**	**C3**	**C4**
А	12	23	30	38
Б	10	19	32	40
В	11	20	35	40
Г	18	25	28	35

p = 0.7; *P* = (0.2, 0.4, 0.1, 0.3)

ВАРИАНТ 5

Таблица 1

	С1	**С2**	**С3**	**С4**
А	106	123	125	134
Б	110	115	123	140
В	112	120	136	138
Г	115	120	125	145

р = 0.8; P = (0.4, 0.3, 0.1, 0.2)

Таблица 2

	С1	**С2**	**С3**	**С4**
А	12	23	25	32
Б	15	19	20	30
В	11	20	35	40
Г	18	25	28	38

р = 0.2; P = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)